# 数　学（その１）

## 問題 1

次の問いに答えよ。

**(1)** 7 個の数字 $1, 1, 2, 2, 0, 0, 0$ を使ってできる 7 桁の正の整数は $\boxed{\text{アイウ}}$ 個ある。

**(2)** 半径が 3 の球に内接する正八面体の体積は $\boxed{\text{エオ}}$ である。

**(3)** $\triangle$ABC の周囲の長さが 40，$\triangle$ABC に内接する円の半径が 4 である。点 Q が $5\overrightarrow{\mathrm{AQ}} + 3\overrightarrow{\mathrm{BQ}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = 0$ を満たすとき，$\triangle$QBC の面積は $\boxed{\text{カキ}}$ である。

**(4)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{nk-k^2}{n^3}\right) = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

**(5)** $x^3 + 7x^2 - x - 39 = 0$ の実数解を小さいものから順に $a$，$b$，$c$ とするとき，$\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} = \dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

**(6)** $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\tan\left(\dfrac{5\pi}{14}\right)\tan\left(\dfrac{9\pi}{14}\right) = \boxed{\text{スセ}}$ である。

**(7)** 実数で定義される関数 $y = f(x) = \dfrac{8x^2+5}{x^2-3x+6}$ の最大値を $M$，最小値を $m$ とすると $\dfrac{M}{m} = \dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

**(8)** 1，4，6 の数字を使わない正の整数を小さい数から順に 2，3，5，7，8，9，20，22，23，... のように並べるとき，2023 は $\boxed{\text{ツテト}}$ 番目の数字である。

**(9)** $xy$ 平面上の $x$ 軸の正の範囲に点 P，$y$ 軸の正の範囲に点 Q があり，直線 PQ が点 $(1, 8)$ を通るように動くとき，点 P と点 Q の距離の 2 乗の最小値は $\boxed{\text{ナニヌ}}$ である。

**(10)** $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1)i}{1+\sqrt{3}i}\right)^5 = \boxed{\text{ネ}} + \boxed{\text{ノ}}\,i$ である。 ただし $i$ は虚数単位である。

# 数　学（その２）

## 問題２

次の問いに答えよ。

**(1)** $\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ。

**(2)** $a, b$ が有理数であるとき，$a + b\sqrt{3} = 0$ が $a = b = 0$ の必要十分条件であることを示せ。

**(3)** $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ が無理数であることを示せ。

# 数　学（その３）

## 問題３

点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｔが線で結ばれた図１のような経路がある。この経路上を点Ｐが１秒ごとに以下のような確率で動く。

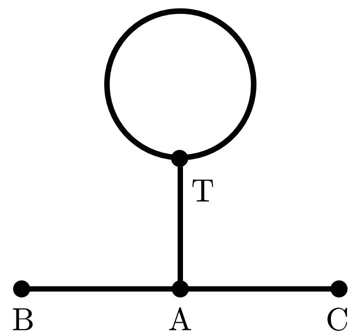


図１

・点Ａから点Ｂ，Ｃ，Ｔに動く確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ である。

・点Ｔから点Ａに動く確率は $\dfrac{1}{3}$，点Ｔから右向きに出て反時計回りに動いて点Ｔに戻る確率は $\dfrac{1}{3}$，左向きに出て時計回りに動いて点Ｔに戻る確率は $\dfrac{1}{3}$ である。

・点Ｂから点Ａに動く確率，点Ｃから点Ａに動く確率は，どちらも１である。

最初，点Ｐが点Ａにあるとする。$n$ 秒後に点Ｐが点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｔにある確率をそれぞれ $a_n, b_n, c_n, t_n$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし $n$ は正の整数とする。

**(1)** $a_1, a_2, a_3, a_4$ を求めよ。

**(2)** $a_{n+1}$ を $b_n, c_n, t_n$ を用いて表せ。

**(3)** $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ の間の関係式を求めよ。

**(4)** $n \to \infty$ における $a_n$ の極限値を求めよ。