問題 1

次の問いに答えよ。

(1) $U=\{x \mid x$ は 2 以上 28 以下の自然数$\}$ を全体集合とする。U の部分集合

$A=\{x \mid x$ は偶数$\}$，$B=\{x \mid x$ は 3 で割ると 1 余る$\}$，

$C=\{x \mid x$ と 2023 は 1 以外に正の公約数を持たない$\}$ について，次の集合の要素の個数を求めよ。ただし，$n(X)$ は集合 X の要素の個数を表す。

$n(A\cap B)=\boxed{ア}$，　$n(\overline{A}\cap B)=\boxed{イ}$，　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=\boxed{ウ}$，　$n(\overline{A\cup B})=\boxed{エ}$，

$n(A\cap B\cap C)=\boxed{オ}$，　$n(A\cap B\cap\overline{C})=\boxed{カ}$，　$n(\overline{A\cup B\cup C})=\boxed{キ}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x\sqrt{x^2-5}\right)=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

(3) 曲線 $y=2x\sqrt{x}$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{5}{3}\right)$ の長さは $\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$ である。

(4) $(1+i)^n=(1-i)^n$ をみたす 2023 以下の正の整数 n は $\boxed{スセソ}$ 個ある。ただし， i は虚数単位である。

(5) 関数 $f(x)=\log|\tan 4x|$ の $x=\dfrac{\pi}{48}$ における微分係数は $\boxed{タチ}$ である。

(6) $\alpha=\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ のとき，$\alpha^5-\alpha^4-12\alpha^3+12\alpha^2+16\alpha=\boxed{ツテ}$ である。

(7) $f(x)=\dfrac{\sin^3 3x}{\sin^3 3x+\cos^3 3x}$ について，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx=\boxed{ト}$ であるから，

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)\,dx=\frac{\pi}{\boxed{ナニ}}$ である。

(8) 3 個のサイコロを同時に振るとき，出た目の和が 8 以下になる確率は $\dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネノ}}$，出た目の積が 12 以下になる確率は $\dfrac{\boxed{ハ}}{\boxed{ヒフ}}$ である。

(9) x を実数とする。命題「 $x^2-9x+20<0 \implies x^2-2(k-1)x+k^2-2k-8\leqq 0$ 」が真となる k の範囲は $\boxed{ヘ}\leqq k\leqq\boxed{ホ}$ である。

(10) 数列 $\{a_k\}$ が $k\geqq 1$ で $a_k>0$，a_k の第 1 項から第 n 項までの和 S_n が

$S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{n^3}{a_n}\right)$ であるとき，$S_5=\boxed{マミ}$，$S_{20}=\boxed{ムメモ}$ である。

問題 3

xy 平面上の点 (p, q) について，p, q がともに整数のときこの点を格子点と呼ぶ。また e を自然対数の底とするとき，$p-e$ または $p+e$ のどちらかと，$q+\dfrac{1}{2}$ がともに整数のとき，この点を e 点と呼ぶことにする。例えば，$(p, q)=\left(1-e, \dfrac{3}{2}\right)$ は e 点である。

次の問いに答えよ。ただし，素数の平方根と e が無理数であり，$2.7<e<2.8$ であることは証明なしに用いてよい。

(1) 2 つの格子点を結ぶ任意の線分は e 点を通らないことを示せ。

(2) 4 つの格子点を頂点とし，1 辺の長さが 1 の任意の正方形の内部にある e 点の個数を求めよ。

(3) 3 つの格子点を頂点とし，1 辺が x 軸に平行，1 辺が y 軸に平行な任意の直角三角形の面積は，この三角形の内部にある e 点の個数の $\dfrac{1}{2}$ に等しいことを示せ。

(4) 3 つの格子点を頂点とする任意の三角形の面積は，この三角形の内部にある e 点の個数の $\dfrac{1}{2}$ に等しいことを示せ。

(5) 3 つの格子点を頂点とする正三角形は存在しないことを示せ。

問題 2

実数 x の区間 $a \leqq x \leqq b$（ただし $0 < a < b$）で正の値をとる微分可能な関数 $f(x)$ に対して，微分可能な逆関数 $g(x)$ が存在するとき，定積分 S_1, S_2 を次式で定義する。

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx$$
$$S_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx$$

次の問いに答えよ。

(1) $S_1 + S_2$ を $a, b, f(a), f(b)$ で表せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_3^{99} \sqrt{\sqrt{1+x} - 1}dx$ を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{\frac{4}{x} - 1}dx$ を求めよ。