問題 1

次の問いに答えよ。

(1) 整数全体を全体集合 U とし，U の部分集合 A，B を $\mathrm{A} = \{1, 4, a^3 + 33, a + 6\}$，$\mathrm{B} = \{2, 7, a^3 + 30, a^2 + a\}$ とする。$n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 2$ であるとき $a = \boxed{\text{アイ}}$ であり，$n\left(\overline{\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{B}}}\right) = \boxed{\text{ウ}}$ ，$n\left((\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})\right) = \boxed{\text{エ}}$ である。ただし，$n(\mathrm{X})$ は集合 X の要素の個数を表す。

(2) 三角形 ABC の辺 AB を 3 : 2 に内分する点を P，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を Q，また AQ と CP の交点を R とするとき，$\dfrac{\triangle \mathrm{RBC}}{\triangle \mathrm{RAC}} = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$\dfrac{\triangle \mathrm{RAC}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(3) 5 個の値からなるデータ $3\cos a$，$2\sin 2a$，$-2\sin 2a$，$2\cos a$，0 の分散の最小値は $\boxed{\text{コ}}$，最大値は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。ただし a は実数とする。

(4) $z = \cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ のとき $z^7 = \boxed{\text{ス}}$，$z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \boxed{\text{セソ}}$ であり，$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6) = \boxed{\text{タ}}$ である。ただし i は虚数単位とする。

(5) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$ のとき，$\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2 = \boxed{\text{チツ}}$ である。

(6) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)\log(4x+1)}{x^2} = \boxed{\text{テ}}$ である。

(7) $f(x) = 2x^4 - 4(1+a)x^3 + 12ax^2 + 16ax + 5$ が極大値を持つような正の実数 a の範囲は $\boxed{\text{ト}} < a < \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$，$\boxed{\text{ヌ}} < a$ である。

(8) medicine に使われている 6 種類 8 文字のうち 4 文字を使って作ることができる異なる文字列の数は $\boxed{\text{ネノハ}}$ である。

(9) $2^{2023}(2^{2023} - 1)$ の 1 の位の数字は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

(10) $A = \left(16^{16}\right)^{16}$，$B = 2^{\left(4^8\right)}$ とするとき，$\log_2(\log_2 A) - \log_2(\log_2 B) = \boxed{\text{フヘ}}$ である。

(11) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 dx = \frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マミ}}}\pi$ である。

問題 2

O を原点とする xy 平面上に点 $\mathrm{A}(2,0)$，点 $\mathrm{B}(1,\sqrt{3})$，および実数 s，t と $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により定まる点 P がある。s，t が **(1)**〜**(3)** のそれぞれの条件を満たす場合について，点 P がとりうる範囲を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

(1) $2 \leqq s + 2t \leqq 6$，$0 \leqq s$，$0 \leqq t$

(2) $1 \leqq |s| + |t| \leqq 6$

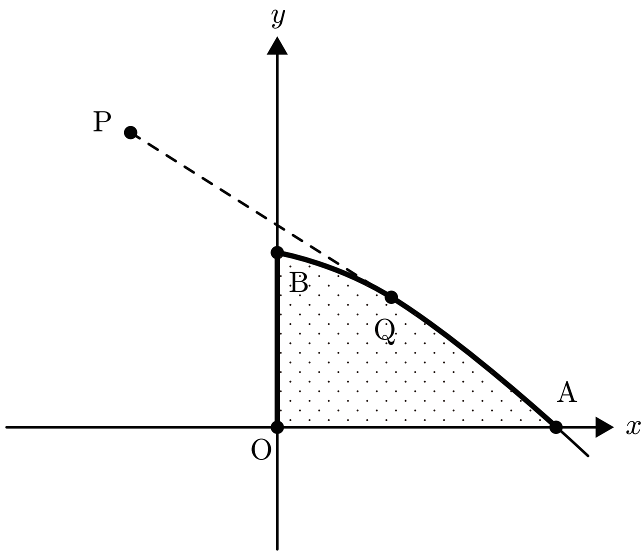
(3) $s^2 + (s+t)^2 \leqq 6$

問題３

O を原点とする xy 平面上の曲線 $y=\dfrac{2}{3}\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right)\ (x \geqq 0)$ 上に点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ をとり，伸び縮みしない糸を曲線 AB，線分 BO 上に緩まないように沿わせる。

この糸は，一端を点 A に固定して，曲線 AB に沿わせて点 B で折り，y 軸の下方向にまっすぐに沿わせると，ちょうど点 O に達する長さである。点 A に固定した糸の端とは反対側の端を点 P とする。

はじめ点 O に点 P があり，糸が緩まないように点 P を時計回りに動かしていくと，途中まで点 P は点 B を中心とし線分 OB の長さを半径とする円の周上にある。その後，糸は曲線 AB から徐々に離れはじめる。糸のうち曲線 AB 上の部分の点 P に近い側の点を点 Q とする。点 P は点 O から動き始めてから後，点 Q が点 A に達するまで動く。次の問いに答えよ。



(1) 糸の長さを求めよ。

(2) 点 Q の x 座標を t とする。$0<t<1$ のとき，点 P が曲線 AB の点 Q における接線上にあることに注意して，点 P の座標を t を用いて表せ。

(3) 点 O を起点とする点 P の軌跡を図示せよ。

(4) 糸が通過した部分の面積を求めよ。