数　学（その１）

問題 1

次の問いに答えよ。

(1) 35^{300} は $\boxed{アイウ}$ 桁の整数であり，最高位の数字は $\boxed{エ}$ である。ただし $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$，$0.8450 < \log_{10} 7 < 0.8451$ である。

(2) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{11}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{11}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{11}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{11}}$ のとき，$a^2 = \boxed{オカ}$ である。

(3) a, b が実数で $x^3 + ax^2 + 39x + b = 0$ が 2 重解 $x = -3$ を持つとき，他の 1 つの解は $x = \boxed{キク}$ である。

(4) 曲線 $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 100$ 上の点 $(9, 3)$ における曲線の接線の方程式は $\boxed{ケ}x + \boxed{コ}y - 39 = 0$ である。

(5) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 = \dfrac{3(2+\sqrt{3})}{4}$，$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ のとき $\cos^2(\alpha - \beta) = \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。

(6) 等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{12} = 5$，$S_{24} = 20$ のとき，$S_{60} = \boxed{スセソ}$ である。

(7) 複素数 $z = \dfrac{3\sqrt{3}+3i}{5+5i}$ について，z^n が実数となる最小の自然数 n は $\boxed{タチ}$ である。ただし i は虚数単位とする。

(8) 曲線 $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ 上の点 $\mathrm{A}(-2, 1)$ における曲線の接線が，点 A 以外で 曲線 $y = f(x)$ と交わる点の y 座標は $\boxed{ツテ}$ である。

(9) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ の 7 個の数字の中から異なる 3 個の数字を並べてできる 3 桁の整数は $\boxed{トナニ}$ 個であり，そのうち 9 の倍数は $\boxed{ヌネ}$ 個である。

(10) 変量 x のデータが

60　　42　　6　　96　　60　　42

のように与えられているとき，変量 x のデータの標準偏差は $\boxed{ノハ}$ である。

数　学（その２）

問題２

四角形 ABCD が円に内接するとき，$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$ が成り立つことを証明せよ。

数　学（その３）

問題３

自然数 n に対し，各桁が全て 1 の n 桁の自然数を $f(n)$ とする。例えば $f(2)=11$，$f(4)=1111$ である。

(1) $f(n)$ を n の式で表せ。

(2) 自然数 l, m に対し l が m の倍数のとき，$f(l)$ は $f(m)$ の倍数となることを証明せよ。

(3) $f(n+1)$ と $f(n)$ が互いに素であることを証明せよ。