第１問

問１　はじめて衝突した直後の小球1，2の速度をそれぞれv_1，V_1とする。運動量保存則より，

$$mv_1 + MV_1 = mv \quad \cdots①$$

また，はね返り係数がeであることから，

$$e = -\frac{v_1 - V_1}{v} \quad \cdots②$$

①，②より，

$$v_1 = \frac{m - eM}{m + M}v \qquad V_1 = \frac{(1+e)m}{m+M}v$$

問２　作用・反作用の法則より，衝突の際に小球1，2が受けた力積の大きさは等しく，小球2が受けた力積の大きさは，小球2の運動量変化の大きさに等しい。したがって，はじめて衝突した際に小球1が受けた力積の大きさをIとすると，

$$I = \left|MV_1 - 0\right| = \frac{(1+e)mMv}{m+M}$$

問３　はじめて衝突してから次に衝突するまでの間，小球1から見た小球2の速さは，②より，

$$\left|V_1 - v_1\right| = ev$$

したがって，小球1から見ると，小球2は速さevで管の中を一周し，再び小球1と衝突するから，求める時間をtとすると，

$$t = \frac{2\pi R}{ev}$$

問４　小球1から見た小球2の速さは衝突するたびにe倍されるが，$0 < e < 1$であるため，衝突するたびに小さくなる。そのため，十分に衝突が繰り返されると，相対的な速さは0となり，小球1と小球2は同じ速さで一体となって運動するようになる。このときの速さをVとすると，運動量保存則より，

$$(m+M)V = mv \qquad \therefore V = \frac{m}{m+M}v$$

問５　**問１の結果より**，はじめて衝突した直後の小球1，2の速度はともに$\dfrac{m}{m+M}v$となる。はじめて衝突した際に失われた力学的エネルギーをΔEとすると，

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}v\right)^2$$

$$= \frac{mMv^2}{2(m+M)}$$

第２問

問１　荷電粒子が電極２の内部に入るときの速さを v とすると，電圧 V_0 によって，荷電粒子の運動エネルギーが qV_0 だけ増加するから，

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV_0 \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}$$

問２　荷電粒子が電極２の内部で描く軌道の半径を r とすると，中心方向の運動方程式より，

$$m\frac{v^2}{r} = qvB \qquad \therefore r = \frac{mv}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mV_0}{q}}$$

問３　T は荷電粒子の円運動の周期の半分に等しいから，

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi r}{v} = \frac{\pi m}{qB}$$

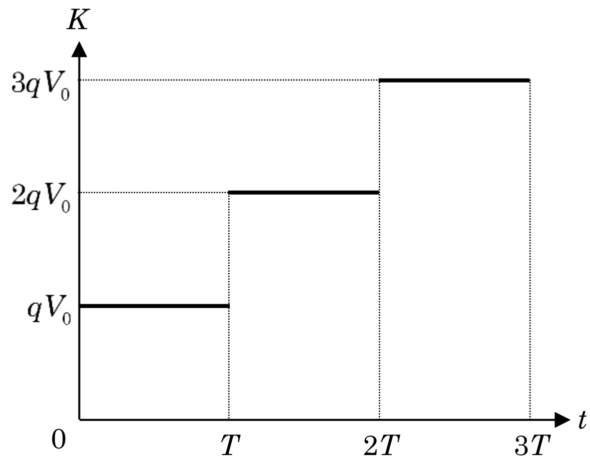
問４　交流電圧の振動数を f とすると，電圧が逆位相となる時間間隔は半周期 $\frac{1}{2f}$ の奇数倍である。これと荷電粒子が電極内を半周するのにかかる時間 T が等しければ，荷電粒子が電極から出てくるたびに交流電圧が $V = V_0$ と $V = -V_0$ を交互にとるため，電極間を運動するたびに荷電粒子を電圧 V_0 で加速することができる。したがって，正の整数を n として，

$$T = (2n-1)\frac{1}{2f} \qquad \therefore f = (2n-1)\frac{1}{2T} = (2n-1)\frac{qB}{2\pi m}$$

f の最小値 $f_{\min}$ は，$n = 1$ として，

$$f_{\min} = \frac{qB}{2\pi m}$$

問５　荷電粒子が電極間を運動するたびに，荷電粒子の運動エネルギーは qV_0 増加する。荷電粒子が電極内を運動している間は K は変化しないから，グラフは下図のようになる。



第３問

問１　音源 S は単位時間あたり f_0 個の音波を発する。よって時間 ΔT で発する音波の個数は，$f_0\Delta T$ となる。

問２　観測者 O が音を聞き始めるのは，音源 S が $t=0$ で発した音波が観測者に到達したときである。$t=0$ で発された音波が観測者 O に到達するには，距離 L だけ伝わる必要があるので，聞き始める時刻は，$\dfrac{L}{V}$。

また，観測者 O が音を聞き終わるのは，音源 S が $t=\Delta T$ で発した音波が観測者に到達したときである。$t=\Delta T$ での音源 S の位置は $x=v_0\Delta T$ であるので，$t=\Delta T$ で発された音波が観測者 O に到達するには，距離 $L-v_0\Delta T$ だけ伝わる必要がある。よって聞き終わる時刻は，

$\Delta T+\dfrac{L-v_0\Delta T}{V}=\dfrac{L+(V-v_0)\Delta T}{V}$。

問３　観測者 O が音波を観測する時間を $\Delta T'$ とすると，問２の結果より，

$$\Delta T'=\frac{L+(V-v_0)\Delta T}{V}-\frac{L}{V}=\frac{V-v_0}{V}\cdot\Delta T$$

観測者 O が観測する音波の振動数を f' とすると，$\boxed{f_0\Delta T=f'\Delta T'}$ より，

$$\boxed{f_0\Delta T=f'\cdot\frac{V-v_0}{V}\Delta T}\qquad\therefore\ f'=\frac{V}{V-v_0}f_0$$

＜注＞ $\boxed{}$ のような，「音源 S が発した音波の個数と，観測者 O が受け取る音波の個数は等しい」を表す式が必要。結論のみの解答は，正答と扱わない。

問４　音源 S が位置 x を通過する瞬間の速さを v とする。等加速度直線運動の公式より，

$$v^2-0^2=2\alpha x\qquad\therefore\ v=\sqrt{2\alpha x}$$

この速さで観測者 O に近づくときに発される音波の観測振動数を F とすると，

$$F=\frac{V}{V-\sqrt{2\alpha x}}f_0$$

問５　観測振動数が最大となるのは，音源 S が観測者 O に最大の速さで近づくとき，つまり観測者 O を通り過ぎる直前に発された音波を観測者 O が観測するときである。

このときの音源の速さを v_{m} とすると，等加速度直線運動の公式より，

$$v_{\mathrm{m}}{}^2-0^2=2\alpha L\qquad\therefore\ v_{\mathrm{m}}=\sqrt{2\alpha L}$$

よって，観測振動数の最大値を F_{m} とすると，

$$F_{\mathrm{m}}=\frac{V}{V-\sqrt{2\alpha L}}f_0$$

題意より $F_{\mathrm{m}}=2f_0$ なので，

$$\frac{V}{V-\sqrt{2\alpha L}}f_0=2f_0\qquad\therefore\ \alpha=\frac{V^2}{8L}$$

第４問

問１　状態 A と状態 C に対するボイル・シャルルの法則より，状態 C での温度を T_C とすると，

$$\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{3p_0\cdot5V_0}{T_\mathrm{C}}\qquad\therefore\ T_\mathrm{C}=15T_0$$

問２　$\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ は定積変化である。熱力学第一法則より，$\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ での吸収熱量を Q_AB，内部エネルギー変化を ΔU_AB とすると，

$$Q_\mathrm{AB}=\Delta U_\mathrm{AB}=\frac{3}{2}V\Delta p=\frac{3}{2}V_0(3p_0-p_0)=3p_0V_0$$

問３　$\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ は定圧変化である。熱力学第一法則より，$\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ での吸収熱量を Q_BC，内部エネルギー変化を ΔU_BC とすると，

$$Q_\mathrm{BC}=\Delta U_\mathrm{BC}+p\Delta V=\frac{5}{2}p\Delta V=\frac{5}{2}3p_0(5V_0-V_0)=30p_0V_0$$

問４　1 サイクルで気体が外部にした仕事（正味の仕事）を W とすると，W はサイクルで囲まれる面積となるので，

$$W=(3p_0-p_0)(5V_0-V_0)=8p_0V_0$$

問５　$\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{A}$ において，気体が熱を吸収する過程は，$\mathrm{A}\to\mathrm{B}$，$\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ の 2 つである。よって，求める熱効率を e とすると，

$$e=\frac{W}{Q_\mathrm{AB}+Q_\mathrm{BC}}=\frac{8p_0V_0}{3p_0V_0+30p_0V_0}=\frac{8}{33}=0.2424\cdots\fallingdotseq0.24$$