問題 1

次の問いに答えよ。

(1) A，B，C は全体集合 U の部分集合とする。$n(A) = 40$，$n(B) = 50$，$n(C) = 60$，$n(A \cup B \cup C) = 100$，$n(A \cap B \cap C) = 10$ かつ $n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C)$ のとき，$n(A \cap B)$ は $\boxed{\text{アイ}}$ である。ただし，$n(X)$ は集合 X の要素の個数を表す。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x \cos x}{\left(\sin^2 x + \frac{1}{2}\right)^2} dx = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(3) $x > 1$ において，関数 $f(x) = 9\log_3 x + 81\log_x 3$ は $x = \boxed{\text{オカ}}$ で 最小値 $\boxed{\text{キク}}$ をとる。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{kn}} = \boxed{\text{ケ}}$ である。

(5) 三角形 ABC において，内接円と辺 BC の接点を D，$\angle$A の二等分線が辺 BC と交わる点を D$'$ とする。AB $= 8$，BD $= 4$，DC $= 6$ であるとき，DD$' = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(6) サイコロを 3 回振って出た目を順に a，b，c としたとき，xy 平面上の原点 O，A(a, b)，B$(c, 0)$ からなる三角形が直角三角形になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソタ}}}$ である。

(7) $a^4 + b^5 + c^6 = 2026$ を満たす自然数 a，b，c は，$a = \boxed{\text{チ}}$，$b = \boxed{\text{ツ}}$，$c = \boxed{\text{テ}}$ である。

(8) $|\vec{a}| = 5$，$|\vec{b}| = 4$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$ とする。$\vec{x}$ が $|\vec{x} - \vec{a}| = |\vec{x} + \vec{b}|$ を満たすとき，$|\vec{x}|^2$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌネ}}}$ である。

(9) a は 0 でない実数とする。3 次関数 $f(x) = x^3 - 6x + 4$ に対して，点 P$(2, a)$ を通る接線がちょうど 2 本引けるのは $a = \boxed{\text{ノハ}}$ のときである。

(10) 複素数 z，w が $|z| = 2$，$w = \dfrac{2z - 2}{z + 1}$ を満たすとき，$|w|^2$ の最大値は $\boxed{\text{ヒフ}}$ である。

問題２

xy 平面上に，点 C，点 P，点 Q がある。これらの点は次の条件 (ｉ) 〜 (iii) を満たす点である。

(ｉ) 点 C は点 $(0, s)$ を中心とする半径 1 の円周上を動く点。

(ii) 点 P は点 C との距離 PC が点 P の x 軸からの距離と等しい点。

(iii) 点 Q は点 C を固定した場合に，点 P の軌跡上にあり y 座標が最小になる点。

次の問いに答えよ。

(1) $s = 2$ のとき，点 Q の軌跡を表す式を求め，xy 平面上にその軌跡を図示せよ。

(2) $2 \leqq s \leqq 4$ の範囲で s が変化するとき，点 Q が動く領域 D を xy 平面上に図示せよ。
　また，領域 D の面積を求めよ。

(3) 領域 D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

問題3

次の問いに答えよ。

(1) 整式 $f(u)$ は u の 4 次式で，任意の実数 x に対して $\displaystyle\int_x^{x+1} f(u)du = x^4$ を満たす。$f(u)$ を求めよ。

(2) **(1)** の式を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めよ。

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\dfrac{2n-1}{2}\right)^4$ を求めよ。