

第 1 問 (25 点 : 問 1 ~ 問 3 各 6 点, 問 4 7 点)

問 1

直方体にはたらく静止摩擦力の大きさを f とする。
斜面に平行な方向の力のつり合いより,

$$f = \boxed{mg \sin \theta}$$

問 2

点 P_1 まわりの力のモーメントのつり合いより,

$$\boxed{Nx + mg \sin \theta \cdot a = mg \cos \theta \cdot \frac{a}{2}}$$

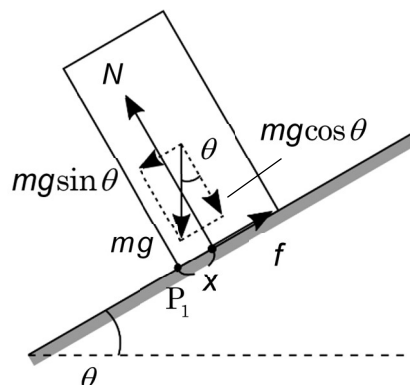
問 3

斜面に垂直な方向の力のつり合いより,

$$N = mg \cos \theta$$

これを問 2 の結果に代入し x について解くと,

$$mg \cos \theta \cdot x = \frac{1}{2} mga (\cos \theta - 2 \sin \theta) \quad \therefore x = \boxed{\frac{1}{2} a (1 - 2 \tan \theta)}$$



問 4

角度が θ_1 となったとき, 直方体は倒れ始める。つまり, このとき垂直抗力の作用点が点 P_1 の位置 ($x=0$) にくる。よって, 問 3 の結果を用いて,

$$0 = \frac{1}{2} a (1 - 2 \tan \theta_1) \quad \therefore \tan \theta_1 = \frac{1}{2}$$

このとき直方体はすべっていないので, $f \leq \mu N$ が成り立つ。

$$f \leq \mu N \quad \Rightarrow \quad mg \sin \theta_1 \leq \mu mg \cos \theta_1 \quad \therefore \tan \theta_1 \leq \mu$$

よって静止摩擦係数 μ は, $\tan \theta_1 = \frac{1}{2}$ 以上であることがわかる。つまり, $\mu_0 = \frac{1}{2}$ である。

第2問 (25点：問1 5点，問2～問6 各4点)

問1

時刻 t ($0 \leq t < \frac{a}{v}$) において，コイル PQRS の磁場の中に進入している部分は下図 (左) の台形 PTUS であり，その面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2} \{a + (a + 2vt)\} \cdot vt = avt + v^2 t^2$$

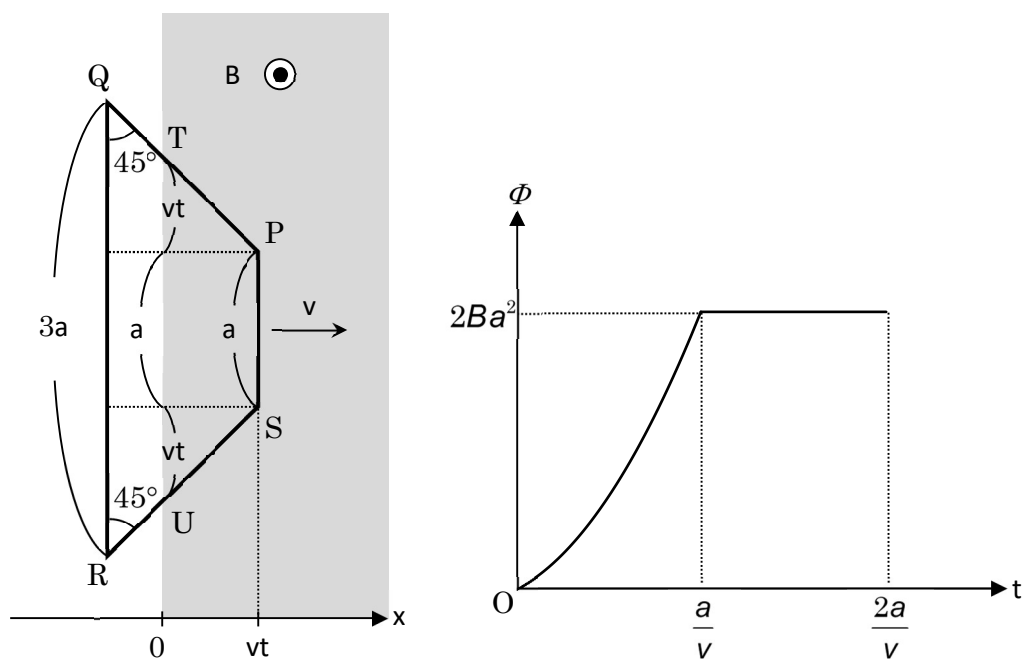
したがって，

$$\Phi = BS = B(avt + v^2 t^2) \quad \dots \textcircled{1}$$

また，時刻 t ($\frac{a}{v} \leq t \leq \frac{2a}{v}$) においては，コイル PQRS 全体が磁場の中に進入しているので，

$$\Phi = B \cdot \frac{1}{2}(a + 3a)a = 2Ba^2$$

以上から，求めるグラフは下図 (右) のようになる。



問2

①より、時刻 $t + \Delta t$ における磁束 $\Phi + \Delta\Phi$ は、

$$\Phi + \Delta\Phi = B \left\{ av(t + \Delta t) + v^2(t + \Delta t)^2 \right\} = B \left\{ avt + av\Delta t + v^2t^2 \left(1 + \frac{\Delta t}{t} \right)^2 \right\}$$

ここで、 $\frac{\Delta t}{t} \ll 1$ だから、近似式より、

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{t} \right)^2 \approx 1 + \frac{2\Delta t}{t}$$

したがって、

$$\Phi + \Delta\Phi \approx B \left\{ avt + av\Delta t + v^2t^2 \left(1 + \frac{2\Delta t}{t} \right) \right\} = \Phi + B(av\Delta t + 2v^2t\Delta t)$$

となるから、

$$\Delta\Phi = \boxed{Bv(a + 2vt)\Delta t}$$

問3

時刻 t において、コイル PQRS に生じる誘導起電力の大きさを V とすると、

$$V = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = Bv(a + 2vt)$$

また、その向きはレンツの法則より、 $P \rightarrow S \rightarrow R \rightarrow Q \rightarrow P$ の向きに電流を流そうとする向きである。したがって、 $I < 0$ であり、

$$I = -\frac{V}{R} = \boxed{-\frac{Bv(a + 2vt)}{R}}$$

問4

時刻 t において、辺 PS が磁場から受ける力の大きさを F_1 とすると、

$$F_1 = |I|Ba = \boxed{\frac{B^2va(a + 2vt)}{R}}$$

問5

時刻 t において辺 PQ、および辺 RS が磁場から受ける力の大きさをそれぞれ F_2 、 F_3 とする。コイル PQRS が受ける力の向きは右図のようになる。ここで、辺 PQ および辺 RS のうち、磁場の中に進入している部分の長さが $\sqrt{2}vt$ であることに注意すると、

$$F_2 = F_3 = \sqrt{2}|I|Bvt$$

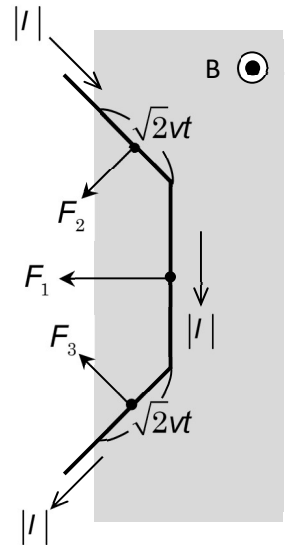
F_2 、 F_3 の x 軸に垂直な成分同士は打ち消し合うから、合力 F はこれらの x 成分の和になる。向きに注意して、

$$F = -F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_3 = -|I|B(a + 2vt) = \boxed{-\frac{B^2v(a + 2vt)^2}{R}}$$

問6

時刻 t において、コイル PQRS を一定の速さで運動させるために必要な外力は $-F$ である。エネルギー収支より、コイル PQRS で消費される電力は、外力がコイル PQRS に対してする仕事の仕事率に等しい。したがって、

$$P = \boxed{-Fv}$$



第3問 (25 点：(ア)～(オ) 各 4 点, (カ) 5 点)
問

(ア) 速さ v_1 で時間 t_0 だけ進むから, $B_1B_2 = \boxed{v_1 t_0}$

(イ) 速さ v_2 で時間 t_0 だけ広がるから, 素元波の半径 A_1A_2 は, $A_1A_2 = \boxed{v_2 t_0}$

(ウ) 直角三角形 $A_1A_2B_2$ に注目して, $\angle A_1B_2A_2 = \theta_2$ であるから,
 $A_1A_2 = A_1B_2 \times \boxed{\sin \theta_2}$

(エ) 直角三角形 $A_1B_1B_2$ に注目して, $\angle B_1A_1B_2 = \theta_1$ であるから,
 $B_1B_2 = A_1B_2 \times \boxed{\sin \theta_1}$

(オ) (ア)～(エ)の結果より,
 $v_2 t_0 = A_1B_2 \times \sin \theta_2 \quad \cdots \textcircled{1} \quad v_1 t_0 = A_1B_2 \times \sin \theta_1 \quad \cdots \textcircled{2}$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{ より, } \frac{v_1}{v_2} = \boxed{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}}$$

(カ) 真空中の光の速さを c とすると,

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \quad \cdots \textcircled{3} \quad v_2 = \frac{c}{n_2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \div \textcircled{3} \text{ と (オ) の結果より, } \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \boxed{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}}$$

第4問 (25 点 : 各 5 点)

問 1

混合前の容器 A, B 内の気体の物質量を, それぞれ n_A , n_B とする。理想気体の状態方程式より,

$$\text{容器 A} : P_0 \cdot 2V_0 = n_A RT_0 \quad \therefore n_A = \frac{2P_0 V_0}{RT_0}$$

$$\text{容器 B} : \frac{3}{2} P_0 \cdot 3V_0 = n_B R \cdot 2T_0 \quad \therefore n_B = \frac{9P_0 V_0}{4RT_0}$$

$$\text{よってこれらの和は, } n_A + n_B = \frac{2P_0 V_0}{RT_0} + \frac{9P_0 V_0}{4RT_0} = \boxed{\frac{17P_0 V_0}{4RT_0}}$$

問 2

混合前の容器 A, B 内の気体の内部エネルギーを, それぞれ U_A , U_B とする。単原子分子理想気体の内部エネルギーの公式 $U = \frac{3}{2} nRT$ と, 問 1 の解答過程でたてた理想気体の状態方程式より,

$$\text{容器 A} : U_A = \frac{3}{2} n_A RT_0 = \frac{3}{2} \cdot 2P_0 V_0 = 3P_0 V_0$$

$$\text{容器 B} : U_B = \frac{3}{2} n_B R \cdot 2T_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{2} P_0 V_0 = \frac{27}{4} P_0 V_0$$

$$\text{よってこれらの和は, } U_A + U_B = 3P_0 V_0 + \frac{27}{4} P_0 V_0 = \boxed{\frac{39}{4} P_0 V_0}$$

問 3

混合後の容器 A, B 内の気体の物質量を, それぞれ n'_A , n'_B とする。混合後の容器 A, B 内の気体に対する理想気体の状態方程式より,

$$\text{容器 A} : P \cdot 2V_0 = n'_A RT \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{容器 B} : P \cdot 3V_0 = n'_B RT \quad \cdots \textcircled{2}$$

これを用いて, 混合後の容器 A, B 内の気体の内部エネルギーの和は,

$$\frac{3}{2} n'_A RT + \frac{3}{2} n'_B RT = \frac{3}{2} \cdot 2PV_0 + \frac{3}{2} \cdot 3PV_0 = \boxed{\frac{15}{2} PV_0}$$

問 4

気体の内部エネルギーの和が混合前後で変化しないので, 問 2 と問 3 の結果を用いて,

$$\frac{39}{4} P_0 V_0 = \frac{15}{2} PV_0 \quad \therefore P = \boxed{\frac{13}{10} P_0}$$

問 5

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{の辺々を足すと, } \textcircled{1} + \textcircled{2} : 5PV_0 = (n'_A + n'_B)RT \quad \cdots \textcircled{3}$$

混合の前後で物質量の和は変化しないので, 問 1 の結果より,

$$n'_A + n'_B = n_A + n_B = \frac{17P_0 V_0}{4RT_0}$$

よって③式は, 問 4 の結果を用いて,

$$5 \cdot \frac{13}{10} P_0 V_0 = \frac{17P_0 V_0}{4RT_0} RT \quad \therefore T = \boxed{\frac{26}{17} T_0}$$