

第 1 問

問 1

力学的エネルギー保存則より,

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \therefore v_0 = \boxed{\sqrt{2gh}}$$

問 2

小球が点 P_0 と点 P_1 の位置を通過しているときに対する仕事とエネルギーの関係より, 求める動摩擦力による仕事を W とすると,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + W = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}v_0\right)^2 \quad \therefore W = \boxed{-\frac{4}{9}mv_0^2}$$

問 3

あらい面と小球との間の動摩擦係数を μ' とすると, 点 P_0 , P_1 間を小球が運動するときに動摩擦力が小球にする仕事は $-\mu'mgL$ と表せる。問 2 の結果を用いて,

$$W = -\frac{4}{9}mv_0^2 = -\mu'mgL \quad \therefore \mu' = \boxed{\frac{4v_0^2}{9gL}}$$

問 4

小球が点 P_1 を速さ $\frac{1}{3}v_0$ で通過したときと, バネを最も押し縮めたときの 2 状況に対する力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}v_0\right)^2 = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \quad \therefore x_{\max} = \boxed{\frac{v_0}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

問 5

ばねの縮みが $\frac{1}{2}x_{\max}$ のときに小球がもつ速さを v とする。力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}v_0\right)^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}x_{\max}\right)^2 \\ \Rightarrow v^2 &= \left(\frac{1}{3}v_0\right)^2 - \frac{k}{4m}x_{\max}^2 = \frac{1}{9}v_0^2 - \frac{k}{4m} \cdot \frac{v_0^2}{9} \cdot \frac{m}{k} = \frac{1}{12}v_0^2 \quad \therefore v = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}v_0} \end{aligned}$$

問 6

ばねに押し戻された小球は, しばらくして再び摩擦のある区間に入る。点 P_1 に戻ってきたときの速さは $\frac{1}{3}v_0$ であり, 点 P_1 から停止するまでにすべった距離を l とすると, 仕事とエネルギーの関係より,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}v_0\right)^2 - \mu'mgl = 0$$

ここで, $\mu' = \frac{4v_0^2}{9gL}$ を代入すると,

$$\frac{4v_0^2}{9gL}mgl = \frac{1}{2}m \cdot \frac{1}{9}v_0^2 \quad \therefore l = \frac{1}{8}L$$

よって, 点 P_0 からの距離は, $L - \frac{1}{8}L = \boxed{\frac{7}{8}L}$

問 7

曲面 AB 上で小球を離す位置の水平面からの高さを H とし、点 P_0 を 2 回目に通過するときの速さを V とする。小球が摩擦のある区間 P_0P_1 を 2 回通過し、再び点 P_0 に戻ることから、仕事とエネルギーの関係より、

$$mgH - 2 \cdot \mu' mgL = \frac{1}{2} mV^2$$

小球が再び点 P_0 を通過するためには、 $\frac{1}{2} mV^2$ が正の値をとればよい。よって、

$$\frac{1}{2} mV^2 = mgH - 2\mu' mgL > 0$$

ここで、 $v_0 = \sqrt{2gh}$ 、 $\mu' = \frac{4v_0^2}{9gL}$ を用いると、

$$mgH > 2 \cdot \frac{4v_0^2}{9gL} mgL \quad \Rightarrow \quad H > \frac{8}{9g} \cdot 2gh \quad \therefore \quad H > \frac{16}{9}h$$

よって、曲面 AB 上で小球を離す位置の水平面からの高さが $\frac{16}{9}h$ よりも大きければ、小

球は再び点 P_0 を通過できる。つまり、 $H_0 = \boxed{\frac{16}{9}h}$ である。

第2問 (35 点 : 問1 R_B3 点, R_C4 点, その他 各 7 点)

問1

抵抗 A, B, C の抵抗値をそれぞれ R_A , R_B , R_C とする。抵抗値と抵抗率の関係より,

$$R_A = \rho \frac{L}{S} \quad (= R_0)$$

$$R_B = \frac{1}{2} \rho \frac{3L}{2S} = \frac{3}{4} \rho \frac{L}{S} = \boxed{\frac{3}{4} R_0}$$

$$R_C = 3 \rho \frac{\frac{1}{4} L}{\frac{1}{2} S} = \frac{3}{2} \rho \frac{L}{S} = \boxed{\frac{3}{2} R_0}$$

問2

抵抗②, ③の合成抵抗を R_{23} とする。抵抗値の並列合成の公式より,

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0} \quad \therefore R_{23} = \frac{1}{2} R_0$$

R_{23} と抵抗①は直列なので, これらを合成したときの合成抵抗を R_{123} とすると, 抵抗値の直列合成の公式より,

$$R_{123} = R_0 + R_{23} = \boxed{\frac{3}{2} R_0}$$

問3

抵抗値 R_{123} の抵抗 1 つに起電力 V の電池が接続されていると考え, 電池を流れる電流の大きさを I として, オームの法則より,

$$V = R_{123} I \quad \therefore I = \frac{V}{R_{123}} = \boxed{\frac{2V}{3R_0}}$$

問4

抵抗を並列に接続すると, その合成抵抗の抵抗値は合成する前の抵抗値よりも小さくなる。よって, 回路の合成抵抗の抵抗値を最も小さくするためには, 3 つの抵抗の抵抗値が大きいもの 2 つを並列に接続すればよい。問題文に「抵抗②の抵抗値は, 抵抗③の抵抗値よりも小さい」とあるので, 抵抗②は抵抗 A (抵抗値 R_0), 抵抗③は抵抗 C (抵抗値 $\frac{3}{2} R_0$) である。

また, 抵抗①は抵抗 B (抵抗値 $\frac{3}{4} R_0$) である。

抵抗②, ③の合成抵抗を R'_{23} とすると, 抵抗値の並列合成の公式より,

$$\frac{1}{R_{23}'} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{\frac{3}{2}R_0} = \frac{5}{3R_0} \quad \therefore R_{23}' = \frac{3}{5}R_0$$

R_{23}' と抵抗①は直列なので、これらを合成したときの合成抵抗を R_{123}' とすると、抵抗値の直列合成の公式より、

$$R_{123}' = \frac{3}{4}R_0 + \frac{3}{5}R_0 = \boxed{\frac{27}{20}R_0}$$

問 5

抵抗値 R_{123}' の抵抗 1 つに起電力 V の電池が接続されていると考え、電池を流れる電流の大きさを I' とし、オームの法則より、

$$V = R_{123}' I' \quad \therefore I' = \frac{V}{R_{123}'} = \frac{20V}{27R_0}$$

この電流 I' が抵抗①に流れ、抵抗②、③（並列部分）に抵抗値の逆比で分配される。抵抗②と抵抗③の抵抗値の比は $R_0 : \frac{3}{2}R_0 = 2 : 3$ であるので、電流の分配比は $3 : 2$ となる。

よって、抵抗②に流れる電流の大きさは、

$$\frac{3}{2+3} \cdot I' = \frac{3}{5} \cdot \frac{20V}{27R_0} = \boxed{\frac{4V}{9R_0}}$$

第 3 問 (35 点 : 問 3 3 点, 問 2 温度 4 点, その他 各 7 点)

問 1

毎秒 $3.50 \times 10^{-2} \text{ kg}$ だけ重油を供給し, 重油を燃焼させたとき 1 kg あたり $4.20 \times 10^4 \text{ J}$ の熱量を吸収するので, 求める熱量 Q_{in} は,

$$Q_{\text{in}} = 3.50 \times 10^{-2} \times 4.20 \times 10^4 = \boxed{1.47 \times 10^3 \text{ J/s}}$$

問 2

吸収した熱量のうち 40% が仕事になるので, 60% が排熱として放出される。よって, 求める熱量 Q_{out} は,

$$Q_{\text{out}} = Q_{\text{in}} \times 0.60 \doteq \boxed{8.8 \times 10^2 \text{ J/s}}$$

また, 排出される冷却水の温度を T [$^{\circ}\text{C}$] とすると, $Q = mc\Delta T$ より,

$$8.82 \times 10^2 = 14 \times 4.2 \times (T - 70) \quad \therefore T = \boxed{85^{\circ}\text{C}}$$

問 3

吸収した熱量のうち 40% が仕事になるので, 熱効率は $\boxed{0.40}$ 。

問 4

求める時間 t は,

$$t = \frac{35}{3.5 \times 10^{-2}} = \boxed{1.0 \times 10^3 \text{ s}}$$

問 5

求める熱量を H とすると, 熱機関の単位時間当たりの仕事 $Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}$ の 80% が電気エネルギーに変換されるので,

$$H = (Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}) \times 0.8 \times 1.0 \times 10^3 \doteq \boxed{4.7 \times 10^5 \text{ J}}$$